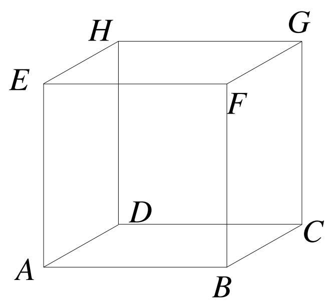
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

I. Quelques propriétés

1. Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les deux droites d'intersection sont parallèles.
2. Si deux plans sécants contiennent deux droites (chacun une) parallèles, alors leur droite d'intersection est parallèle à ces deux droites.
3. Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
4. Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

II. Vecteurs coplanaires

1. Les propriétés des vecteurs du plan (égalité, relation de Chasles, colinéarité) s'étendent aux vecteurs de l'espace.
2. Deux vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires.
3. Trois vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont coplanaires si l'un d'entre eux peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres. C'est-à-dire s'il existe α et β tels que $\vec{u_1}=\alpha\vec{u_2}+\beta\vec{u_3}$ (ou peut-être pour $\vec{u_2}$ ou $\vec{u_3}$).
   Exemple : Dans le cube $ABCDEFGH$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$.



4. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires équivaut à dire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

III.Repère

1. Un repère de l'espace est constitué d'un point et de trois vecteurs non coplanaires.
   Exemple : Dans le cube ci-dessus, $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. Un repère de l'espace est orthogonal si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Il est orthonormé (ou orthonormal) s'il est orthogonal et si ses vecteurs sont de même norme. Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ du cube est orthonormé.
3. Dire que le point A a pour coordonnées $(x\,;y\,;z)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

équivaut à dire que $\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
Remarque : Les trois coordonnées d'un point de l'espace s'appellent respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote.

4. Les propriétés sur les coordonnées des des points et vecteurs du plan (distance, coordonnées d'un vecteur, cordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs,...) s'étendent aux points et vecteurs de l'espace.
   Remarque : Pour le produit scalaire, on est obligé de considérer les angles non orientés, mais les propriétés restent inchangées.

IV.Équations d'objets de l'espace

1. Équation d'un plan
   a, b, c et d étant quatre réels, (a, b et c n'étant pas tous nuls) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan P. On dit que l'équation $ax+by+cz+d=0$ est une équation cartésienne de P.

2. Plans particuliers
   Un plan est parallèle à un des axes de coordonnées quand un des coefficient a, b ou c de son équation cartésienne est nul ((Ox) si $a=0$, (Oy) si $b=0$ et (Oz) si $c=0$).
   Exemple : Le plan d'équation $5x-4z=4$ est parallèle à (Oy).
   Un plan est parallèle à un des plan de base quand deux des coefficients de son équation sont nuls.
   Exemple : Le plan d'équation $z=17$ est parallèle au plan (xOy).

3. Sphère
   Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, une sphère de centre O et de rayon R a pour équation $x^2+y^2+z^2=R^2$.

4. Cylindre
   Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R a pour équation $x^2+y^2=R^2$.
   Remarques : - Pour un cylindre limité par deux cercles de base, il faut rajouter une condition du type $a\leq z\leq b$.
   - On a de la même façon des cylindres d'axes (Ox) et (Oy).
5. Cône
   Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un cône d'axe (Oz) et de sommet O a une équation du type $x^2+y^2=k^2z^2$ où k est un réel strictement positif.
   Remarques : - Pour un cône limité par son sommet et cercle de base, il faut rajouter une condition du type $0\leq z\leq a$. Dans ce cas, le rayon du cercle de base est ka.
   - On a de la même façon des cônes d'axes (Ox) et (Oy).